4. LİNEER DÖNÜŞÜMLER

Bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına giden L tasviri (fonksiyonu) $L: V \to W$ ile gösterilir.

Tanım: Bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına giden, keyfi $v_1, v_2 \in V$ ve keyfi α, β skalerleri için

$$L(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha L(v_1)+\beta L(v_2)$$

şartını sağlayan, L fonksiyonuna lineer dönüşüm veya lineer operatör denir.

Eğer L lineer dönüşüm ise $L(v_1+v_2)=L(v_1)+L(v_2)$ ve $L(\alpha v)=\alpha L(v)$ dir. Tersi de doğrudur.

$\mathbb{R}^2$'de Lineer Dönüşümler:

Örk 1. keyfi $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ için $L(x)=3x$ olsun.

$\forall x,y\in\mathbb{R}^2$ ve $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$L(\alpha x+\beta y)=3(\alpha x+\beta y)=\alpha(3x)+\beta(3y)$$
$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

L lineer dönüşümdür.

2. keyfi $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ $L(x)=x_1 e_1$ olsun.

$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\quad L(x)=L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix}$

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \; y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\alpha x+\beta y=\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\alpha x_2+\beta y_2\end{bmatrix}$$

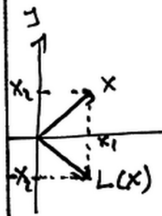
$$L(\alpha x+\beta y)=(\alpha x_1+\beta y_1)e_1=\alpha(x_1e_1)+\beta(y_1e_1)$$
$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

L Lineer dönüşümdür.

3. keyfi $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ için $L(x)=\begin{bmatrix}x_1\\-x_2\end{bmatrix}$ olsun.

$$L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\-x_2\end{bmatrix}$$

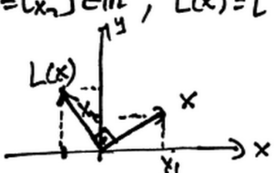
$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \; y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$



$$L(\alpha x+\beta y)=L\left(\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\alpha x_2+\beta y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\-\alpha x_2-\beta y_2\end{bmatrix}$$
$$=\alpha\begin{bmatrix}x_1\\-x_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}y_1\\-y_2\end{bmatrix}$$
$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

Lineer dönüşümdür.

4. keyfi $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $L(x)=\begin{bmatrix}-x_2\\x_1\end{bmatrix}$ olsun.



$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \; y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$L(\alpha x+\beta y)=\begin{bmatrix}-\alpha x_2-\beta y_2\\\alpha x_1+\beta y_1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-x_2\\x_1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-y_2\\y_1\end{bmatrix}$$
$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

L lineer dönüşümdür.

5. keyfi $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ için $L(x)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2+1\end{bmatrix}$ olsun

$$L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2+1\end{bmatrix}$$

$$L(3x)\overset{?}{=}3L(x)$$

$$3x=3\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1\\3x_2\end{bmatrix}$$

$$L(3x)=L\left(\begin{bmatrix}3x_1\\3x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3x_1\\3x_2+1\end{bmatrix}$$

$$3L(x)=3\begin{bmatrix}x_1\\x_2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1\\3x_2+3\end{bmatrix}$$

$$L(3x)\neq 3L(x)$$

L lineer dönüşüm değildir.

$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye Lineer Dönüşümler:

Örk 1. $\forall x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ için $L(x)=x_1+x_2+x_3$ ile tanımlı $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ lineer dönüşüm müdür?

$x, y\in\mathbb{R}^3 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$L(\alpha x+\beta y)=L\left(\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\alpha x_2+\beta y_2\\\alpha x_3+\beta y_3\end{bmatrix}\right)=$$
$$=(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+(\alpha x_3+\beta y_3)$$
$$\cancel{=\alpha(x_1}=\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)$$
$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

$$L(x)=x_1+x_2+x_3=\underbrace{(1\;1\;1)}_{1\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{3\times 1}$$

$$A=(1\;1\;1)$$

$$L(x)=A\cdot x$$

2. $L(x)=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$ ile tanımlı $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ fonksiyon lineer dönüşüm müdür?

$$L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$$

193

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$L(\alpha x+\beta y)=L\left(\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_2+\beta y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha x_2+\beta y_2\\ \alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2\end{bmatrix}$$

$$=\alpha\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}y_2\\y_1\\y_1+y_2\end{bmatrix}$$

$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$ $L(x)=A.x$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$$

194

Genel olarak, eğer A $m\times n$ tipinde bir matris ise $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye L_A lineer operatörü $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için

$$L_A(x)=A.x$$

olarak tanımlayabiliriz. Gerçekten

$$L_A(\alpha x+\beta y)=A.(\alpha x+\beta y)=\alpha(A.x)+\beta(A.y)$$

$$=\alpha L_A(x)+\beta L_A(y)$$

olduğundan L_A lineerdir. Bu yönden her $m\times n$ tipindeki A matrisini $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer operatör olarak düşünebiliriz.

195

V vektör uzayından W vektör uzayına lineer dönüşümler:

Teorem: Eğer L, V vektör uzayından W vektör uzayına bir lineer operatör ise

1) $L(0_V)=0_W$ $L: V\to W$, $0_V\to 0_W=L(0_V)$

2) $v_1,v_2,\dots,v_n\in V$ ve $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ skalerler ise $L(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n)=\alpha_1L(v_1)+\dots+\alpha_nL(v_n)$

3) $\forall v\in V$ için $L(-v)=-L(v)$ dir.

196

Kanıt: (1) $L(\alpha v)=\alpha L(v)$

$\alpha=0$ $L(0_V)=0L(v)=0_W$

örk. 1. V keyfi vektör uzayı olsun. keyfi $v\in V$ için

$$I(v)=v$$

ile tanımlı lineer operatörüne birim operatör denir.

$$\left(I(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha v_1+\beta v_2=\alpha I(v_1)+\beta I(v_2)\right)$$

$$I: V\to V$$

197

2. L, $C[a,b]$'den $\mathbb{R}$'ye

$$L(f)=\int_a^b f(x)dx$$

ile tanımlansın.

$f,g\in C[a,b]$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$L(\alpha f+\beta g)=\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx$$

$$=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

$$=\alpha L(f)+\beta L(g)$$

198

3. D, $C^1[a,b]$'den $C[a,b]$'ye

$$D(f)=f'$$

ile tanımlansın. (Türev operatörü)

$f,g\in C^1[a,b]$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$D(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)'$$

$$=\alpha f'+\beta g'$$

$$=\alpha D(f)+\beta D(g)$$

199

Görüntü ve Çekirdek

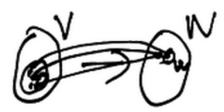
Tanım: $L: V\to W$ lineer dönüşüm olsun. Çek L ile gösterilen

$$\text{Çek}\,L=(\ker L)=\{v\in V:\ L(v)=0_W\}$$

kümesine L'nin çekirdeği denir.

Çek L $\subset$ V

L:



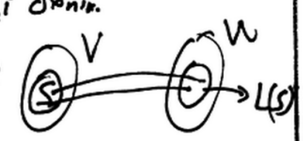
200

Tanım: $L: V\to W$ lineer dönüşüm ve S, V'nin bir altuzayı olsun. L(S) ile gösterilen

$$L(S)=\{w\in W:\ w=L(v),\ v\in S\}$$

kümesine S'nin görüntüsü denir. V vektör uzayının görüntüsü L(V) ile gösterilir ve L'nin görüntü kümesi denir.

$L(S)\subset W$ L:



Teorem: $L: V \to W$ lineer dönüşüm ve S, V'nin bir alt uzayı ile

1) Çek$L$, V'nin bir alt uzayıdır

2) $L(S)$, W'nın bir alt uzayıdır.

kanıt: (1) i) $v_1, v_2 \in$ Çek$L$ $\Rightarrow v_1+v_2 \overset{?}{\in}$ Çek$L$

$L(v_1)=L(v_2)=0$

$L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) = 0+0=0$

$v_1+v_2 \in$ Çek$L$

ii) $v \in$ Çek$L$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha v \overset{?}{\in}$ Çek$L$

$L(v)=0$

$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha . 0 = 0$

$\alpha v \in$ Çek$L$

Çek$L$, V'nin bir alt uzayıdır.

Örk. 1. $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

Çek$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : L(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$L(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0$ $(x_2 = k \in \mathbb{R})$

Çek$L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{R} \right\}$

Çek$L$'nin boyutu $\left(\left\{ k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$ 1'dir.

$L(\mathbb{R}^2) = ?$

$L(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R} \right\}$

$L(\mathbb{R}^2)$'nin boyutu 1'dir.

2. $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{bmatrix}$ lineer dönüşüm ve S, $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzay olsun. Çek$(L) = ?$ ve $L(S) = ?$

$L(x) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1+x_2=0$

$x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3 = a \Rightarrow x_2 = -a$

$x_1 = +a$

Çek$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R} \right\}$

$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Çek$L$'in bir tabanıdır.

Çek$L$'nin boyutu 1'dir

$S = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$L(S) = ?$

$L(S) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathbb{R}^2$

3. $D: P_3 \to P_2$ $D(p(x)) = p'(x)$ lineer operatörünün çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

$D(ax^2+bx+c) = 2ax+b$

$D(p(x)) = 0 \Rightarrow 2ax+b = 0.x+0.1$

$a=b=0$

Çek$(D) = \{ d \in P_3 : d \in \mathbb{R} \}$

$D(P_3) = \{ kx+L : k, L \in \mathbb{R} \} = P_2$

Lineer Dönüşümlerin Matris Gösterimi (Temsili):

Teorem: $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer operatör ise $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $L(x) = A.x$ olacak şekilde bir $m \times n$ tipinde A matrisi vardır. Burada A'nın j. sütunu

$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = L(e_j)$ $j=1,2,\ldots,n$

dir.

A'ya L'nin standart (doğal) baza göre matris gösterimi denir.

Örk: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer operatörü $\forall x \in \mathbb{R}^3$ için $L(x) = (x_1+x_2, x_2+x_3)^T$ ile tanımlansın. L'nin doğal baza göre matris temsilini bulunuz.

$L(e_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= 1\, e_1 + 0\, e_2$

$L(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$L(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \quad \underline{2\times 3}$$

$$L(x)=AX=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix}$$

Teorem! $E=[v_1,v_2,\dots,v_n]$ ve $F=[w_1,w_2,\dots,w_m]$ sırasıyla V ve W vektör uzaylarında sıralı bazlar ise her $L: V\to W$ lineer dönüşümü için $[L(v)]_F = A[v]_E \quad \forall v\in V$ nin olacak şekilde $m\times n$ tipinde bir A matrisi vardır. Burada

$$\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}=[L(v_j)]_F \quad j=1,2,\dots,n$$

dir. A matrisine E ve F sıralı bazlarına göre L'nin matris gösterimi (temsili) dir.

ört. 1. $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü, $\forall x\in\mathbb{R}^3$ için

$$L(x)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2+x_3\end{bmatrix}$$ ile tanımlansın.

a) $E=[e_1,e_2,e_3]$ ve $F=\left[\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right]$

b) $E=\left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]$ ve $F=$ ″

Sıralı bazlarına göre L'nin matris temsilini bul.

$$L(e_1)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$[L(e_1)]_F=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$L(e_2)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+1/2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$[L(e_2)]_F=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$L(e_3)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+1/2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$[L(e_3)]_F=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1/2&1/2&1/2\\-1/2&1/2&1/2\end{bmatrix}$$

$$[L(v)]_F=A.[v]_E=A.v$$

b) $$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\right]_F=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1.\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right]_F=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_F=\begin{bmatrix}3/2\\+1/2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1/2&1&3/2\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$$

$$[L(v)]_F=A[v]_E$$

2. $D(p(x))=p'(x)$ olsun. $D: P_3\to P_2$ lineer operatörü için $[x^2,x,1]$ ve $[x,1]$ sıralı bazlarına göre D'nin matris gösterimini bul.

$$D(x^2)=2x=2.x+0.1$$
$$D(x)=1=0.x+1.1$$
$$D(1)=0=0.x+0.1$$

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Teorem! $E=[u_1,u_2,u_3,\dots,u_n]$ ve $F=[b_1,b_2,\dots,b_m]$ sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$'nin sıralı bazları olsun. $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ve A, E ve F bazlarına göre L'nin matris gösterimi ise

$$\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}=B^{-1}L(u_j) \quad j=1,2,\dots,n$$

dir. Burada $B=(b_1,b_2,\dots,b_m)$ dir.
(matris)

Sonuç: A, $E=[u_1,u_2,\dots,u_n]$ ve $F=[b_1,b_2,\dots,b_m]$ bazlarına göre $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$'nin matris gösterimi ise

$$(b_1,b_2,\dots,b_m \mid L(u_1),\dots,L(u_n))$$

matrisinin indirgenmiş satır basamak formu $(I\mid A)$ dır.

ört: $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü $L(x)=(x_2,\ x_1+x_2,\ x_1-x_2)^T$ olsun. $u_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $u_2=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ ve $b_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $b_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

217

$b_3 = [1]$ ise $[u_1, u_2]$ ve $[b_1, b_2, b_3]$ sıralı tabanlarına göre L'nin matris temsilini bul.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

218